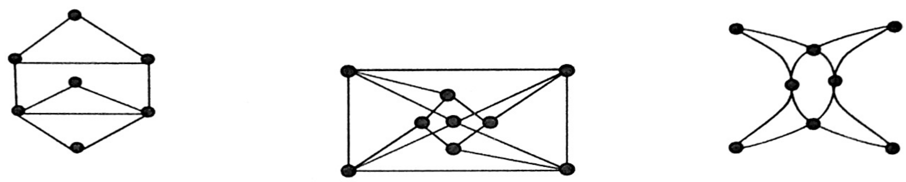
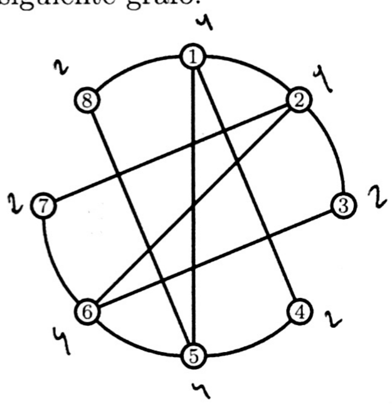
EJERCICIOS 6: Grafos eulerianos y hamiltonianos

6.1 Estudiar si los siguientes grafos son eulerianos o admiten un recorrido euleriano abierto:

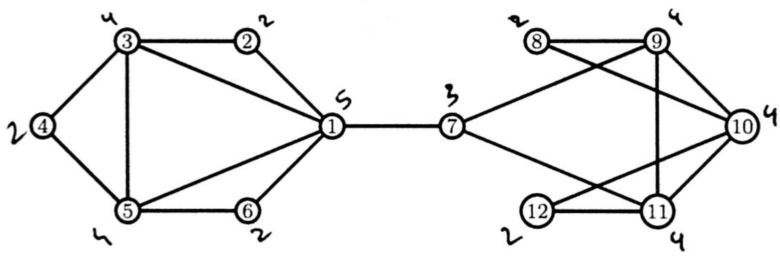


6.2 ¿Para qué valores de n los grafos C_n, K_n y $K_{n,n}$ son eulerianos?

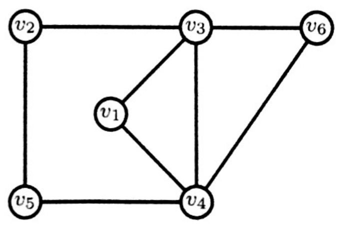
6.3 Aplicar el algoritmo de Hierholzer para hallar un recorrido euleriano cerrado, comenzando en el vértice **1** en el siguiente grafo.



6.4 Encontrar, si existe, un recorrido euleriano en el siguiente grafo, usando el algoritmo de Fleury. Indicar el orden en que es seleccionada cada arista.



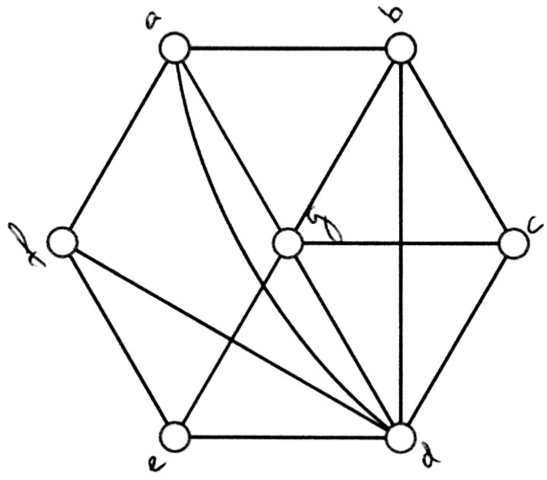
6.5 Un grafo G es unión disjunta de ciclos, si podemos descomponer a G como la unión de ciclos que no tienen aristas en común, aunque se permite que tengan algún vértice en común. Se pueden caracterizar los grafos eulerianos mediante ciclos. Un grafo conexo G es euleriano si y solo si G se puede descomponer en unión disjunta de ciclos. Hallar la descomposición en ciclos del siguiente grafo:



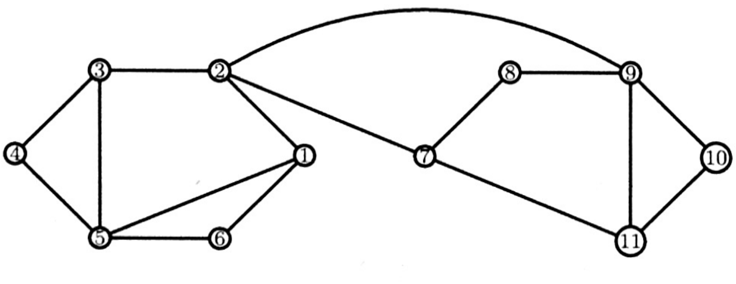
6.6 Si G es un grafo conexo con $2k$ vértices de grado impar, entonces se puede descomponer en k recorridos eulerianos. Para cada par de vértices de grado impar añadimos una arista que los una. El nuevo grafo H así formado es euleriano. Construimos un recorrido euleriano en H. Si eliminamos de este recorrido euleriano las k aristas añadidas se obtiene k recorridos eulerianos.

(a) Hallar la descomposición en recorridos eulerianos del grafo de Petersen.

(b) Hallar la descomposición en recorridos eulerianos del siguiente grafo.



6.7 En el siguiente grafo las aristas representan las rutas marítimas que oferta una compañía naviera entre distintos puertos.



Estudiar si una misma tripulación puede servir todas las rutas marítimas sin repetir ninguna, volviendo al puerto de partida. En caso negativo, ¿cuántas rutas habrá que añadir y entre qué puertos para poder subsanar tal eventualidad? Determinar, por medio del algoritmo apropiado, un itinerario de modo que la tripulación asista todas las rutas marítimas programadas en el grafo dado.

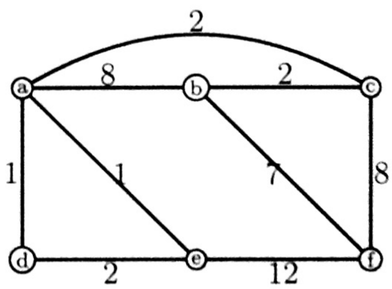
6.8 La mecánica del juego del dominó es colocar unas fichas junto a otras con la única regla de que sólo pueden tocarse por el lado en el que tienen una cifra en común. En el juego del dominó, ¿es posible completar una partida que se cierra con la misma cifra que se abre, es decir, completar una secuencia cerrada con todas las fichas? ¿Y si prescindimos de todas las fichas con un seis? ¿Y si eliminamos las fichas $1-2$ y $3-4$? Responder a las mismas cuestiones para partidas que se abren y se cierran con cifras distintas.

6.9 Sea el alfabeto binario $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ y $\mathcal{A}(2, n)$ el conjunto de todas las n-palabras con 0's y 1's. El digrafo de Bruijn $B(2, n)$ se construye como sigue: su conjunto de vértices son las palabras de $\mathcal{A}(2, n-1)$ y para cada palabra t de longitud $n-2$, se dibujan los siguientes arcos:

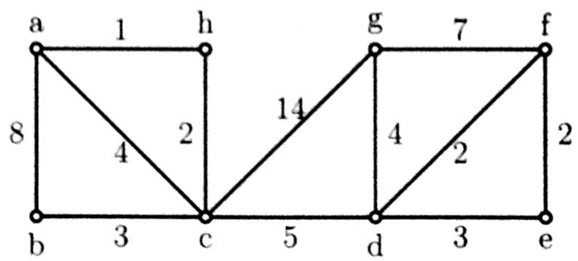
- un arco desde el vértice $0t$ al vértice $t0$, y se le asigna la etiqueta $0t0$;
- un arco desde el vértice $0t$ al vértice $t1$ y se le asigna la etiqueta $0t1$;
- un arco desde el vértice $1t$ al vértice $t0$ y se le asigna la etiqueta $1t0$;
- un arco desde el vértice $1t$ al vértice $t1$ y se le asigna la etiqueta $1t1$.

Dibujar los digrafos $B(2, 3)$ y $B(2, 4)$. Obtener el orden y el tamaño de dichos digrafos. Estudiar si son digrafos eulerianos y, en caso afirmativo, hallar un recorrido euleriano en estos digrafos.

6.10 El problema del cartero consiste en hallar un recorrido cerrado en un grafo conexo con pesos tal que el recorrido contenga todas las aristas al menos una vez (puede repetir alguna arista) y su peso sea mínimo. Resolver dicho problema sobre el siguiente grafo:



6.11 El siguiente grafo con pesos modela las calles de un barrio: los nodos son las intersecciones entre las calles y el peso en cada arista es una estimación del tiempo que se tarda en recorrer la calle. Un cartero sale de la oficina de correos situada en el nodo "a", tiene que recorrer todas las calles para repartir la correspondencia y regresar a la oficina. Hallar un recorrido cerrado desde "a" que contenga todas las aristas del grafo al menos una vez y que sea de peso mínimo. Describir los pasos del algoritmo aplicado. ¿El grafo (sin pesos) es hamiltoniano?



6.12 Dibujar un ejemplo de un grafo simple G, con a lo más 6 vértices, que verifique cada una de las siguientes condiciones:

(a) G es euleriano y es hamiltoniano.

(b) G es euleriano pero no es hamiltoniano.

(c) G no es euleriano pero sí es hamiltoniano.

(d) G no es euleriano ni hamiltoniano.

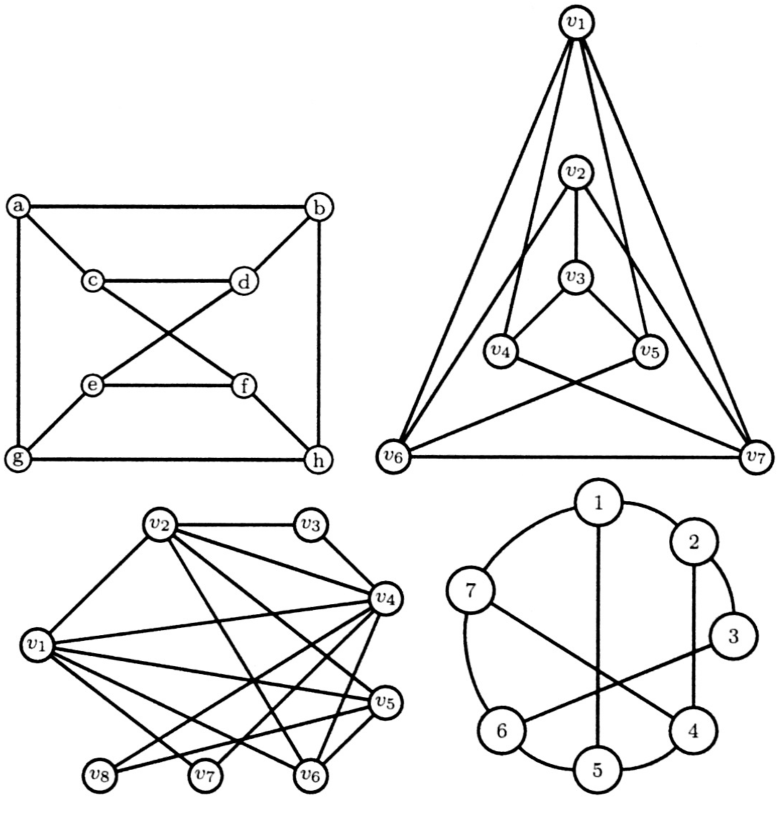
(e) G tiene un recorrido euleriano abierto pero no tiene un camino hamiltoniano.

(f) G no tiene un recorrido euleriano abierto pero sí tiene un camino hamiltoniano.

(g) G tiene un recorrido euleriano abierto y un camino hamiltoniano.

(h) G no tiene un recorrido euleriano abierto ni un camino hamiltoniano?

6.13 Estudiar si cada uno de los siguientes grafos contiene un ciclo hamiltoniano, o si contiene un camino hamiltoniano:



6.14 En una red de 10 ordenadores cada nodo está conectado al menos con otros 6 y el número total de conexiones es múltiplo de 13. Se pide:

(a) ¿Cuántas conexiones tiene?

(b) ¿Es la red hamiltoniana?

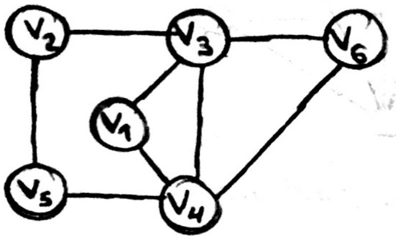
(c) Si la red es euleriana y el número de conexiones es 39, ¿cuántos vértices de grado 6 tiene?

6.15 Dibujar un grafo simple de 8 vértices y más de 8 aristas que es euleriano y no es hamiltoniano o probar que tal grafo no existe.

6.16 Dar una condición suficiente para que un grafo simple con n vértices, $n \geq 3$, sea hamiltoniano. Dar un ejemplo de grafo que sea hamiltoniano y no cumpla dicha condición.

Tomás Miranda Perales (u120033). Para 13/Nov/2013.

6.5. Un grafo "G" es unión disjunta de ciclos si podemos descomponer a "G" como la unión de ciclos que no tienen aristas en común, aunque se permite que tengan algún vértice en común. Se pueden caracterizar los grafos eulerianos mediante ciclos. Un grafo conexo "G" es euleriano si y sólo si "G" se puede descomponer en unión disjunta de ciclos. Hallar la descomposición en ciclos del siguiente grafo:



Lo podemos descomponer en:

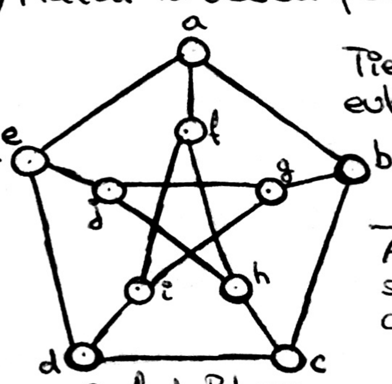
- $\{V_2, V_3, V_4, V_5\}$ y $\{V_1, V_3, V_6, V_4\}$
- $\{V_2, V_3, V_6, V_4, V_5\}$ y $\{V_1, V_3, V_4\}$
- $\{V_2, V_3, V_1, V_4, V_5\}$ y $\{V_3, V_6, V_4\}$

6.6. Si "G" es un grafo conexo con "2k" vértices de grado impar, entonces se puede descomponer en "k" recorridos eulerianos. Para cada par de vértices de grado impar añadimos una arista que los una. El nuevo grafo "H" formado así, es euleriano. Construimos un recorrido euleriano en "H". Si eliminamos de este recorrido euleriano las "k" aristas añadidas, se obtienen "k" recorridos eulerianos.

a) Hallar la descomposición en recorridos eulerianos del grafo de Petersen.

Tiene 10 (2·5) vértices impares, puede descomponerse en 5 recorridos eulerianos.
con grados

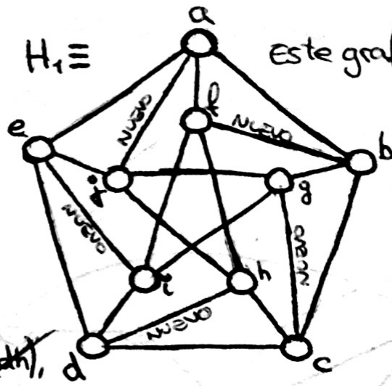
$G_1 \equiv$



Grafo de Petersen.

Añadimos aristas necesarios según las indicaciones del problema.

$H_1 \equiv$



este grafo, "H_1", es euleriano.

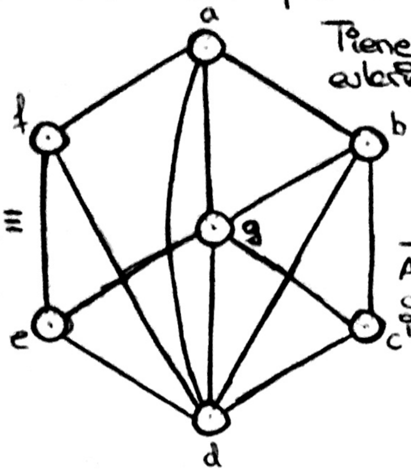
<u>Recorrido euleriano:</u> $\{$(ab), (bc), (cd), (de), ~~(ei)~~, (id), ~~(dh)~~, (hc), ~~(cg)~~, (gb), ~~(bf)~~, (fa), ~~(aj)~~, (jg), (gi), (if), (fh), (hj), (je), (ea)$\}$

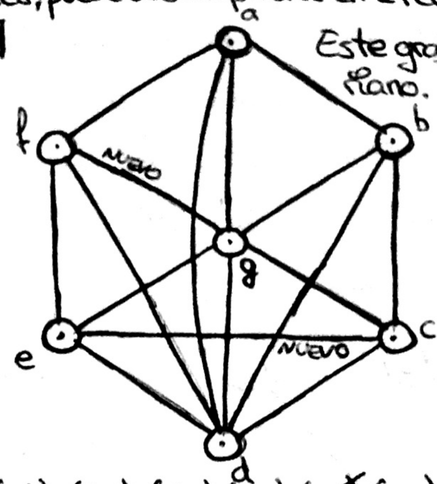
En el recorrido anterior vamos a eliminar las aristas que añadimos anteriormente.

(aj) (bf) (cg) (dh) (ei)

b) Hallar la descomposición en recorridos eulerianos del siguiente grafo:

Tiene 4 (2-2) vértices impares $\boxed{\text{con grados}}$, puede descomponerse en 2 recorridos eulerianos.

$G_2 \equiv$ 

Añadimos aristas necesarias según las indicaciones del problema. $\longrightarrow$ $H_2 \equiv$ 

Este grafo, "H_2", es euleriano.

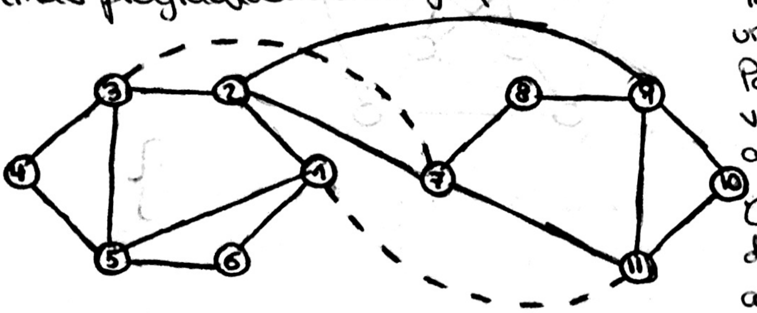
Recorrido euleriano: {(ab),(bc),(cd),(de),(ef),~~(fg)~~,(gb),(bd),(dg),(ge),~~(ec)~~,(cg),(ga),(ad),(df),(fa)}

En el recorrido anterior vamos a eliminar las aristas que añadimos anteriormente.

(ce) (fg)

6.7. En el siguiente grafo, las aristas representan las rutas marítimas que oferta una compañía naviera entre distintos puertos.

Estudiar si una misma tripulación puede servir todas las rutas marítimas sin repetir ninguna, volviendo al puerto de partida. En caso negativo, ¿cuántas rutas habrá que añadir, y entre qué puertos, para poder subsanar tal eventualidad? Determinar, por medio del algoritmo apropiado, un itinerario de modo que la tripulación asista todas las rutas marítimas programadas en el grafo dado.



Tal cual están planteadas las aristas (rutas), no hay un único recorrido euleriano.

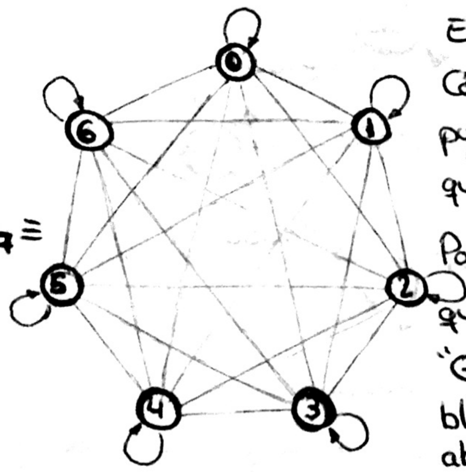
Para que tal eventualidad sea posible, de todos los vértices (puertos) tendría que salir $\boxed{\text{o llegar}}$ un número par de aristas (rutas).

Como hay 4 vértices (puertos) de grado impar, podemos unirlos con rutas adicionales (dos a dos). Con aristas discontinuas hemos subsanado el problema.

El recorrido euleriano sería así: {(1-11),(11-10),(10-9),(9-11),(11-7),(7-8),(8-9),(9-2),(2-7),(7-3),(3-4),(4-5),(5-6),(6-1),(1-5),(5-3),(3-2),(2-1)}

6.8. La mecánica del juego del dominó es colocar unas fichas junto a otras con la única regla de que sólo pueden tocarse por el lado en el que tienen una cifra en común. En el juego del dominó, ¿es posible completar una partida que se cierra con la misma cifra que se abre, es decir, completar una secuencia cerrada con todas las fichas? ¿Y si prescindimos de todas las fichas con un seis? ¿Y si eliminamos las fichas "1-2" y "3-4"? Responder a las mismas cuestiones para partidas que se abren y se cierran con cifras distintas.

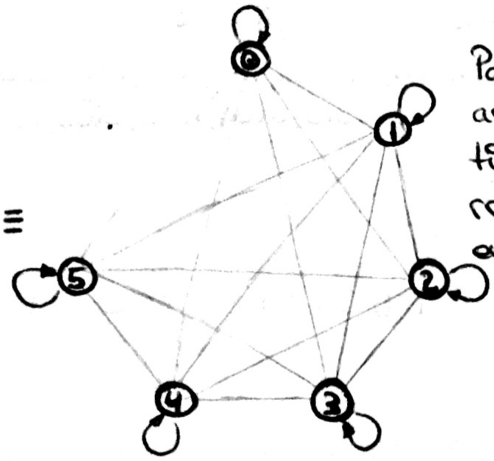
$K_7 \equiv$



Este grafo, "K_7", establece una ficha por cada arista del grafo. Como en el grafo tenemos todos los vértices con grado par, sí se puede completar una partida que se cierre con la misma cifra que se abrió.

Para prescindir de todas las fichas que contengan la cifra seis, hay que eliminar el vértice 6, por lo que obtendríamos el grafo "G_6". Como tenemos todos los vértices de grado impar, no es posible completar una partida que se cierre con la misma cifra que se abrió quitando las fichas que contengan el seis.

$G_6 \equiv$



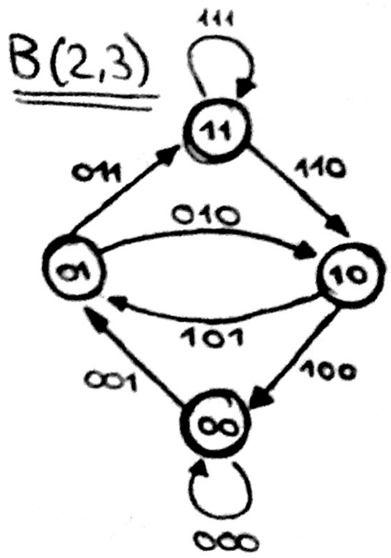
Para eliminar las fichas "(1-2)" y "(3-4)", hay que eliminar dos aristas del grafo "K_7", resultando que en dicho grafo, los vértices 1, 2, 3 y 4 tendrían grado impar. Esto imposibilita cerrar el camino con la misma cifra que se abrió, salvo que empiece y acabe en una cifra impar (la misma).

6.9. Sea el alfabeto binario "$A = \{0,1\}$" y "$A(2,n)$" el conjunto de todas las n-palabras con ceros y unos. El digrafo de Bruijn "$B(2,n)$" se construye como sigue: su conjunto de vértices son las palabras de "$A(2,n-1)$" y para cada palabra "t" de longitud "n-2", se dibujan los siguientes arcos:

- Un arco desde el vértice "0t" al vértice "t0" y se le asigna la etiqueta "0t0".
- ——————— "0t" ——————— "t1" ——————— "0t1".
- ——————— "1t" ——————— "t0" ——————— "1t0".
- ——————— "1t" ——————— "t1" ——————— "1t1".

Dibujar los digrafos B(2,3) y B(2,4). Obtener el orden y el tamaño de dichos digrafos. Estudiar si son digrafos eulerianos, y en caso afirmativo, hallar un recorrido euleriano en estos digrafos.

B(2,3)



Este es un digrafo euleriano, un recorrido que lo demuestra podría ser el siguiente:

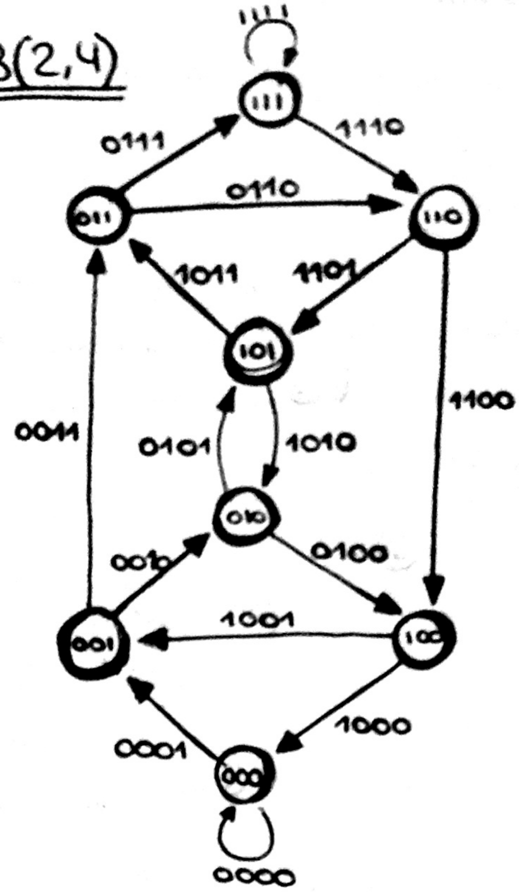
{011, 111, 110, 101, 010, 100, 000, 001}

Orden: $2^2 = 4$

Tamaño: $2^3 = 8$

Sec. Bruijn: 01110100

B(2,4)



Este es un digrafo euleriano, un recorrido que lo demuestra podría ser el siguiente:

{0011, 0110, 1101, 1011, 0111, 1111, 1110, 1100, 1000, 0000, 0001, 0010, 0101, 1010, 0100, 1001}

Orden: $2^3 = 8$

Tamaño: $2^4 = 16$

Sec. Bruijn: 0011011110000101

6.14. En una red de 10 ordenadores cada nodo está conectado al menos con otros 6 y el número total de conexiones es múltiplo de 13. Se pide:

a) ¿Cuántas conexiones tiene?

b) ¿Es la red Hamiltoniana?

c) Si la red es Euleriana y el número de conexiones es 39, ¿cuántos vértices de grado 6 tiene?